DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2013.01.011

第 26 卷第 1 期　　纺 织 高 校 基 础 科 学 学 报　　Vol. 26, No. 1
2013 年 3 月　　BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES　　March, 2013

文章编号:1006-8341(2013)01-0018-03

一个新的伪 Smarandache 函数及其均值

童敏娜

(西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要:引入了一个新的伪 Smarandche 函数 $Z_0(n)$. 当 n 为偶数时,定义 $Z_0(n)=m$, m 为最小的正整数,使得 n 整除 $2+4+6+\cdots+2m=m(m+1)$, 即 $Z_0(n)=\min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m(m+1)\}$; 当 n 为奇数时, m 为最小的整数使得 $n\mid 1+3+5+\cdots+(2m-1)=m^2$. 即 $Z_0(n)=min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m^2\}$. 利用解析方法以及 *Perron* 公式研究函数 $Z_0(2n-1)$ 的均值性质, 并给出了一个较强的渐近公式.

关键词:*Smarandache* 函数;解析方法;*Perron* 公式;均值;渐近公式

中图分类号:*O* 156.4　　　**文献标识码:***A*

1　引言与主要结论

引言对于任意正整数 n,著名的 *Smarandache* 函数 S(n) 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$,即就是 $S(n)=min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m!\}$. 而伪 *Smarandche* 函数 Z(n) 定义为最小的正整数 k 使得 n 整除 $1+2+3+\cdots+k$. 即 $Z(n)=min\{k:k\in\mathbf{N},n\mid k(k+1)/2\}$. 关于这 2 个函数的性质,有不少数论专家进行过研究,获得了不少有价值的研究成果[1-7]. 然而,关于 Z(n) 的均值性质,至今知道的很少,甚至还不知道是否存在均值 $\sum_{n\leqslant x}Z(n)$ 的一个渐近公式 ?即使给出一个非平凡的上界估计也是很难的问题.

受以上 2 个函数定义的启发,本文引入了一个新的伪 *Smarandche* 函数 $Z_0(n)$,即当 n 为偶数时,定义 $Z_0(n)=m$, m 为最小的正整数,使得 n 整除 $2+4+6+\cdots+2m=m(m+1)$, 即 $Z_0(n)=min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m(m+1)\}$; 当 n 为奇数时, m 为最小的整数使得 $n\mid 1+3+5+\cdots+(2m-1)=m^2$. 即 $Z_0(n)=min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m^2\}$. 利用解析方法以及 *Perron* 公式研究函数 $Z_0(2n-1)$ 的均值性质, 并给出了一个较强的渐近公式. 即

定理 1　$\forall x\in\mathbf{R}, x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}Z_0(2n-1)=\frac{3\zeta(3)}{\pi^2}x^2+O(x^{3/2+\varepsilon}),$$

其中　$\zeta(s)$ 为 *Riemann* ζ-函数, ε 为任意给定的正数.

是否存在 $Z_0(2n)$ 均值的一个渐近公式是一个公开的问题,有待于进一步研究.

收稿日期:2012-10-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅科学计划项目(12JK871,10JK802)

作者简介:童敏娜(1988-), 女, 陕西省咸阳市人, 西北大学数学系硕士研究生. E-mail:306032626@qq.com

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　定理的证明

2.1　引理

引理 1　设 s 为复数,定义 *Dirichlet* 级数 A(s) 为

$$A(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s},\ \sigma_a<+\infty,$$

并设存在递增函数 H(u) 及 B(u),使得

$$|a(n)|\leqslant H(n),n=1,2,\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|n^{-\sigma}\leqslant B(\sigma),\sigma>\sigma_a,$$

则 $\forall s_0=\sigma_0+it_0$ 及 $b_0>\sigma_a$,当 $b_0\geqslant b>0,b_0\geqslant\sigma_0+b>\sigma_a,T\geqslant1$ 及 $x\geqslant1$ 时,有

(1) 若 x 不等于正整数,则

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)n^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s_0+s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+$$
$$O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|X\|}\right)\right),$$

式中 N 为离 x 最近的整数(当 x 为半奇数时,取 $N=(x-1)/2$);$\|x\|=|N-x|$.

(2) 若 x 等于 n(正整数),则

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)n^{-s_0}+\frac{1}{2}a(N)N^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s_0+s)\frac{N^s}{s}ds+O\left(\frac{N^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+$$
$$O\left(N^{1-\sigma_0}H(2N)\min\left(1,\frac{\log N}{T}\right)\right),$$

式中 O 常数仅与 σ_a,b_0 有关.

2.2　定理 1 的证明

容易证明函数 $Z_0(2n-1)$ 是可乘函数,即就是对任意奇数 m 及 n 且 $(m,n)=1$,有 $Z_0(mn)=Z_0(m)Z_0(n)$. 对任意复数 s $(\mathrm{Re}s>1)$,显然函数 $Z_0(2n-1)\leqslant 2n-1$. 于是当 $\mathrm{Re}s>2$ 时级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}Z_0(2n-1)(2n-1)^{-s}$$

绝对收敛,所以由 Euler 积公式立刻推出

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}Z_0(2n-1)(2n-1)^{-s}=$$
$$\prod_{p\neq2}\left\{1+\frac{Z_0(p)}{p^s}+\frac{Z_0(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{Z_0(p^n)}{p^{ns}}+\cdots\right\}=$$
$$\prod_{p\neq2}\left\{1+\frac{p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}+\frac{p^2}{p^{3s}}+\frac{p^2}{p^{4s}}\cdots+\frac{p^{[(n+1)/2]}}{p^{ns}}+\cdots\right\}=$$
$$\prod_{p\neq2}\left\{\frac{1}{1-p^{-(2s-1)}}\left(1+\frac{1}{p^{s-1}}\right)\right\}=$$
$$\prod_{p\neq2}\left\{\frac{1}{1-p^{-(2s-1)}}\frac{(1+1/p^{s-1})(1-1/p^{s-1})}{(1-1/p^{s-1})}\right\}=$$
$$\prod_{p\neq2}\left\{\frac{1}{1-p^{-(2s-1)}}\frac{1-1/p^{2(s-1)}}{1-1/p^{s-1}}\right\}=$$
$$\frac{\zeta(s-1)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s-2)}\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{2s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{2s-2}}\right)^{-1}.$$

其中　$\zeta(s)$ 为 Riemann ζ-函数,它在 $s=1$ 处有 1 阶极点,留数为 1. 函数 $f(s)x^s/s$ 在 $s=2$ 处有一阶极点,留数为

$$\lim_{s\to2}(s-2)f(s)\frac{x^s}{s}=\frac{\zeta(3)}{2\zeta(2)}\cdot x^2=\frac{3\zeta(3)}{\pi^2}x^2.$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由于 $|Z_0(2n-1)| \leqslant 2n-1, \sum_{n=1}^{+\infty} |Z_0(2n-1)|(2n-1)^{-\sigma} \leqslant \zeta(\sigma-1)$，**在引理**1**中取** $b=5/2, T>2$ **可得**

$$\sum_{n\leqslant x} Z_0(2n-1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{5/2-iT}^{5/2+iT} f(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^{5/2+\varepsilon}}{T}\right). \tag{1}$$

将式(1)**的积分线移至** $s=3/2\pm iT$，**并取** $T=x$，**可得**

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{5/2-iT}^{5/2+iT} + \int_{5/2+iT}^{3/2+iT} + \int_{3/2+iT}^{3/2-iT} + \int_{3/2-iT}^{5/2-iT}\right) f(s)\frac{x^s}{s}ds = \frac{3\zeta(3)}{\pi^2}x^2. \tag{2}$$

注意到当 $\frac{3}{2}\leqslant \mathrm{Re}s \leqslant \frac{5}{2}$ **时**，$\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{2s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{2s-2}}\right)^{-1} \ll 1$，**于是由** Riemann$\zeta$-**函数的性质可知**

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{5/2+iT}^{3/2+iT} f(s)\frac{x^s}{s}ds \ll \int_{3/2}^{5/2} \frac{|\zeta(\sigma-1+iT)|x^\sigma}{T}d\sigma \ll x^{3/2+\varepsilon}. \tag{3}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{3/2-iT}^{5/2-iT} f(s)\frac{x^s}{s}ds \ll \int_{3/2}^{5/2} \frac{|\zeta(\sigma-1-iT)|x^\sigma}{T}d\sigma \ll x^{3/2+\varepsilon}. \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{3/2+iT}^{3/2-iT} f(s)\frac{x^s}{s}ds \ll x^{3/2+\varepsilon}\int_0^T \left|\frac{\zeta(1/2+it)}{t+1}\right|dt \ll x^{3/2+\varepsilon}. \tag{5}$$

于是结合估计式(1)～(5)**可得渐近公式**

$$\sum_{n\leqslant x} Z_0(2n-1) = \frac{3\zeta(3)}{\pi^2}x^2 + O(x^{3/2+\varepsilon}).$$

从而完成了定理1**的证明.**

致谢:感谢张文鹏教授的悉心指导.

参考文献:

[1] 苏丽娟. 关于Smarandache函数的一个新的下界估计[J]. 纺织高校基础科学学报,2009,22(1):133-134.

[2] 吕忠田. 关于F. Smarandache函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纺织高校基础科学学报,2007,20(3):234-236.

[3] 徐哲峰. Smarandache函数的值分布[J]. 数学学报,2006,49(5):1 009-1 012.

[4] 刘燕妮,高鹏. 一个新的数论函数及其均值[J]. 纺织高校基础科学学报,2005,18(2):123-125.

[5] 张文鹏. 关于F. Smarandache函数的两个问题[J]. 西北大学学报,2008,38(2):173-176.

[6] 李玲,姚维利. 一个包含Smarandache函数与伪Smarandache函数的方程及其正整数解[J]. 四川师范大学学报,2010,33(2):200-202.

[7] 苏丽娟. 关于Smarandache函数的一个新的下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学,2008,24(4):706-708.

[8] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社,1999:98-101.

[9] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,2007.

A new pseudo-Smarandache function and its mean value

TONG Min-na

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China)

Abstract: A new pseudo-Smarandache function $Z_0(n)$ is introduced in this paper. When n is an even number, define $Z_0(n)=m$, and m denotes the smallest integer that makes $2+4+6+\cdots+2m=m(m+1)$ divisible by n, namely $Z_0(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}, n\mid m(m+1)\}$; when n is an odd number, m denotes the smallest integer that makes $n\mid 1+3+5+\cdots+(2m-1)=m^2$, namely $Z_0(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}, n\mid m^2\}$. Using analytic method and Perron′s formula, its mean value properties is studied, and a sharp asymptotic formula is given.

Key words: Smarandache function; analytic method; perron′s formula; mean value; asymptotic formula.

编辑、校对:黄燕萍

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net